1 Datenstrukturen

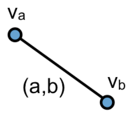
1.3 Bäume

- Hierarchische Datenstruktur
  - Zusammenfassung von Gruppen (z.B. Bund / Länder / Gemeinden)
  - Eindeutige Schachtelung
- Typische Anwendungen
  - Such- / Entscheidungsprobleme
  - Strukturierte Aufzählung
  - Komplexitätsreduktion

Warum brauchen wir Bäume? Suchen/Entscheiden geht schneller hierarchisch als linear.

Definitionen

- Menge von Knoten $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$
  ($v_i \in W$ ... beliebiger Datentyp)
- Menge von Kanten $E = \{(a_1,b_1), \ldots (a_m,b_m)\}$
  ($a_i,b_i \in N$ ... Knotenindizes)
- Falls $(a,b) \in E$, dann ist
  - v_a Vorgänger von v_b
  - v_b Nachfolger von v_a



Definitionen

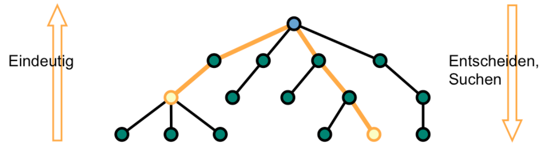
- Eine Folge von Kanten $(i_1,i_2),(i_2,i_3),..,(i_{k1},i_k)$ heißt Pfad von v_{i1} nach v_{ik}
- Für $i_1 = i_k$ ist dieser Pfad ein Zyklus

Definitionen

- Ein Baum B=(V,E) besteht aus einer Menge von Knoten V und einer Menge von Kanten E, so dass gilt:
  - Es gibt keine Zyklen
  - Jeder normale Knoten hat genau einen Vorgänger
  - Es existiert genau ein Wurzelknoten, der keinen Vorgänger hat

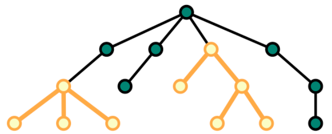
Abgeleitete Eigenschaften

- Für jeden Knoten existiert ein eindeutiger Pfad, der ihn mit dem Wurzelknoten verbindet.



Abgeleitete Eigenschaften

- Jeder Knoten ist Wurzelknoten eines zugehörigen Sub-Baumes (wird später zur Definition des ADT verwendet).



Rekursive Definition!

Weitere Begriffe

- Die Tiefe eines Knotens ist gleich der Länge des zugehörigen Pfades von der Wurzel.
- Die Höhe eines Baumes ist gleich der Tiefe des tiefsten Knotens.
- Der Grad eines Knotens ist die Anzahl seiner Nachfolger.

Weitere Begriffe

- Der eine Knoten ohne Vorgänger heißt Wurzelknoten
- Knoten ohne Nachfolger heißen Blätter
- Knoten mit Nachfolgern heißen innere Knoten

Weitere Begriffe

- Seien $w_1, \ldots, w_k$ die Nachfolger des Knotens v, dann gilt für alle w_i: $\text{height}(\text{subtree}(w_i)) \leq \text{height}(\text{subtree}(v)) - 1$
- Gilt außerdem für alle w_i: $\text{height}(\text{subtree}(w_i)) \geq \text{height}(\text{subtree}(v)) - 2$
- dann heißt der Baum balanciert.

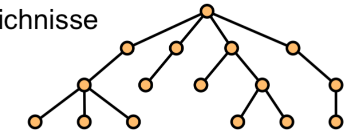
Das Suchen/Einfügen auf balancierten Bäumen hat eine deutlich geringere mittlere Laufzeit als auf unbalancierten Bäumen.

Weitere Begriffe

- Gilt für alle Knoten v mit Nachfolgern $w_1,\dots,w_k$ eines Baumes: height(subtree(w_i)) = height(subtree(v)) −1
  so heißt er vollständig.
- Bei vollständigen Bäumen ist allerdings erlaubt, dass für height(subtree(v)) = 1 die Sub-Bäume subtree(w_i) entweder die Höhe 0 haben oder leer sind.

Darstellung von Bäumen

- Graph
- Klammerung
- Mengen
- Strukturierte Inhaltsverzeichnisse



Diese Darstellung wird in der Informatik üblicherweise verwendet, da sie sehr anschaulich ist.

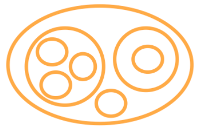
Darstellung von Bäumen

- Graph
- Klammerung
- Mengen
- Strukturierte Inhaltsverzeichnisse

A(B(C,D),E(F,G))

Darstellung von Bäumen

- Graph
- Klammerung
- Mengen
- Strukturierte Inhaltsverzeichnisse



Darstellung von Bäumen

- Graph
- Klammerung
- Mengen
- Strukturierte Inhaltsverzeichnisse

1) A
  1.1) B
  1.2) C
2) D
  2.1) E
    2.1.1) F

Gängige Darstellung von z.B. Dateisystem in den meisten Betriebssystemen.

Konventionen

- In den meisten Anwendungen betrachten wir nur Bäume mit beschränktem oder konstantem Knotengrad (z.B. Binärbäume).
- Wie bei Listen benötigen wir einen Marker, der anzeigt, wo die nächste Operation angewendet werden soll. In der Regel ergibt sich dieser aus dem Algorithmus.

Datentyp: Binärbaum

- Knotentyp ... beliebig
- Create : → Tree
- Node : Tree × Val × Tree → Tree
- Left : Tree → Tree
- Right : Tree → Tree
- Value : Tree → Val
- Empty : Tree → Bool

Konstruktoren: Create & Node
Getter: Left & Right & Value
Empty: Baum leer?

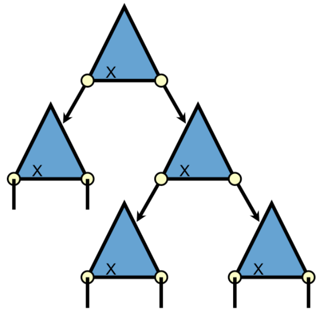
Datentyp: Binärbaum

- Empty(Create()) = true
  Empty(Node(L,V,R)) = false
- Left(Node(L,V,R)) = L
- Right(Node(L,V,R)) = R
- Value(Node(L,V,R)) = V

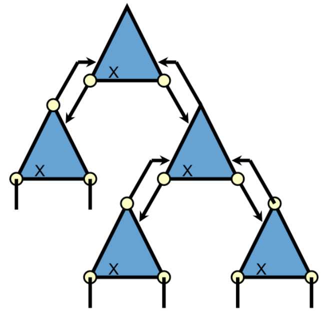
Implementierung

- Pointer (einfach / doppelt)
- Anchor / Sentinel
- Knotengrade (fest / variabel)
- Array-Implementierung für vollständige Bäume

Implementierung

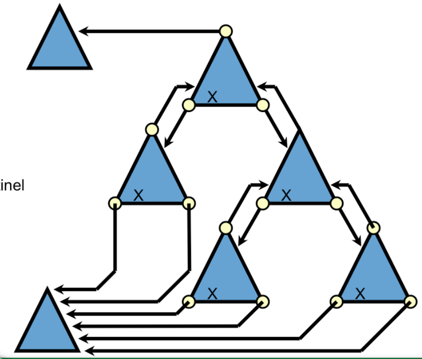


Implementierung

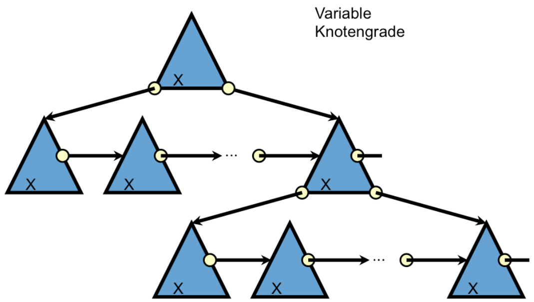


Implementierung

Sentinel



Implementierung



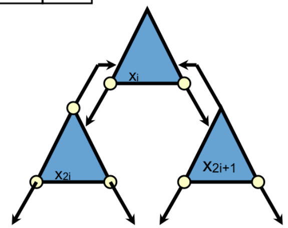
Listen von Child Nodes

Array-Implementierung

- Vollständige Bäume (z.B. Binärbäume)
- $N(k)$ = Anzahl der Knoten der Tiefe k
- $N(k) = 2 \times N(k-1) \rightarrow N(k) = 2^k$
- Speichere die Knoten der Tiefe k in den Array-Einträgen $A[2^k..2^{k+1}-1]$
- Jeder Knoten $A[i]$ findet seine Nachfolger in $A[2i]$ und $A[2i+1]$

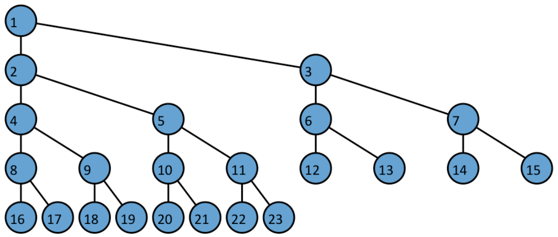
Array-Implementierung

…	x_i	…	…	x_{2i}	x_{2i+1}	…



Array-Implementierung

…	x_i	…	…	x_{2i}	x_{2i+1}	…

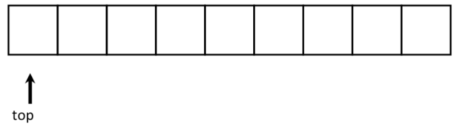


Beispiel: Arithmetische Terme

- „normale“ (Infix) Notation:
  A + B × (C + D) ÷ E
- Postfix Notation:
  A B C D + × E ÷ +
- Präfix Notation:
  + A ÷ × B + C D E
  (Polnische Notation)
- Vorteil: keine Klammern notwendig!

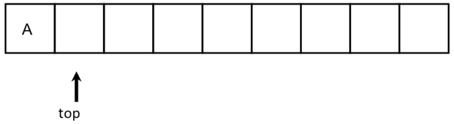
Stack-Computer

A B C D + * E / +



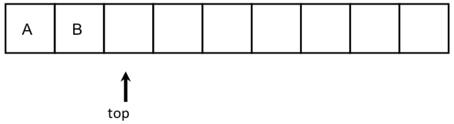
Stack-Computer

A B C D + * E / +



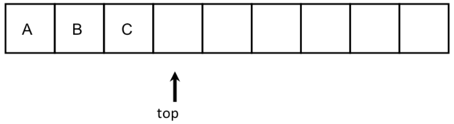
Stack-Computer

A B C D + * E / +



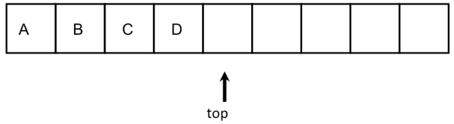
Stack-Computer

ABC D + * E / +



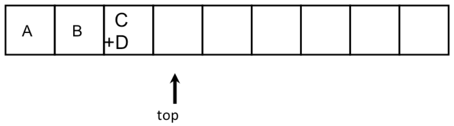
Stack-Computer

ABCD + * E / +



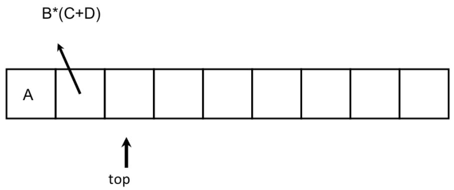
Stack-Computer

ABCD+ * E / +



Stack-Computer

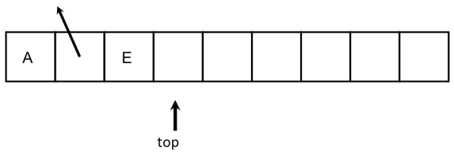
ABCD+* E / +



Stack-Computer

ABCD+*E / +

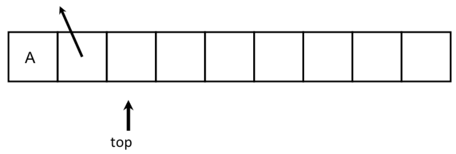
B*(C+D)



Stack-Computer

ABCD+*E/ +

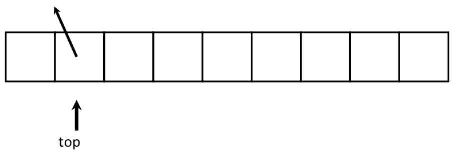
(B*(C+D))/E



Stack-Computer

ABCD+*E/+

A+(B*(C+D))/E



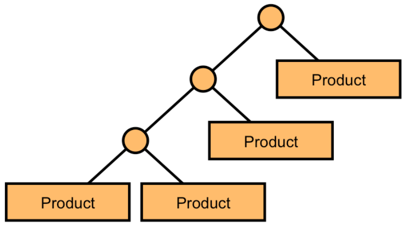
Arithmetische Terme

- Term = Variable oder
  Summe von Produkten
- Produkt = Multiplikation von Termen
- Hierarchische Struktur → Baumstruktur
  - Grundoperationen : R × R → R
    - Binärbaum
- Rekursive Struktur → Rekursive Prozedur

Arithmetische Terme unterliegen Hierarchie. Deshalb bietet sich Darstellung als Baum an.

Term → Binärbaum

Term:



Jeder Baumknoten steht für das Produkt (Term) seiner zwei Söhne. Jeder Sohn kann entweder wiederum ein Baumknoten (Sub-Term) oder ein Blatt (konkrete Zahl) sein. Die Auswertung erfordert in dem Fall eine Tiefentraversierung des Baumes.

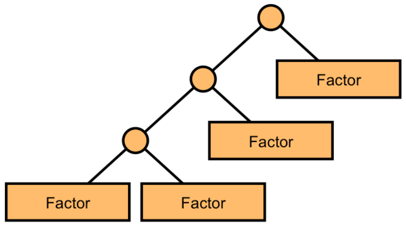
Term → Binärbaum

- BinTree ReadTerm()

```
L ← ReadProduct()
op ← getChar()
while op = '+' or op = '−' do
R ← ReadProduct()
L  ← Node(L,op,R)
op ← getChar()
return L
```

Term → Binärbaum

Product:

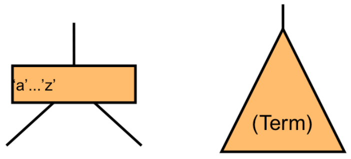


Term → Binärbaum

- BinTree ReadProduct()
  L = ReadFactor()
  op ← getChar()
  while op = '*' or op = '/' do
  R ← ReadFactor()
  L ← Node(L,op,R)
  op ← getChar()
  return L

Term → Binärbaum

Factor:



Term → Binärbaum

- BinTree ReadFactor()

```
c ← getChar()
if c in { `a`, ..., `z` } then
return Node(Create(),c,Create())
else  //  c = `(`
L ← ReadTerm()
c ← getChar()  //  c = `)`
return L
```

Term → Binärbaum

A+B*(C+D)/E

Term → Binärbaum

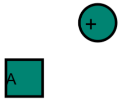
A +B*(C+D)/E

ReadTerm()
ReadProduct()
ReadFactor()

Term → Binärbaum

A + B*(C+D)/E

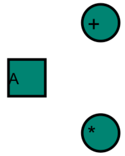
ReadTerm()



Term → Binärbaum

A + B*(C+D)/E

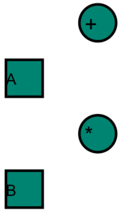
ReadTerm()
ReadProduct()
ReadFactor()



Term → Binärbaum

A + B*(C+D)/E

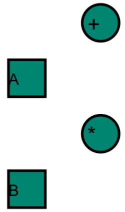
ReadTerm()
ReadProduct()



Term → Binärbaum

A + B*(C+D)/E

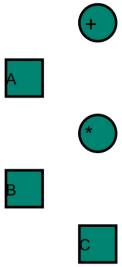
ReadTerm()
ReadProduct()
ReadFactor()
ReadTerm()
ReadProduct()
ReadFactor()



Term → Binärbaum

A + B*(C+D)/E

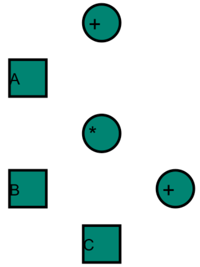
ReadTerm()
ReadProduct()
ReadFactor()
ReadTerm()
ReadProduct()
ReadFactor()



Term → Binärbaum

A + B*(C+D)/E

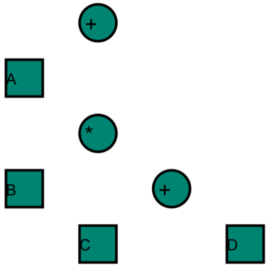
ReadTerm()
ReadProduct()
ReadFactor()
ReadTerm()



Term → Binärbaum

A + B*(C+D)/E

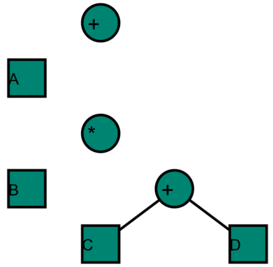
ReadTerm()
ReadProduct()
ReadFactor()
ReadTerm()
ReadProduct()
ReadFactor()



Term → Binärbaum

A + B*(C+D)/E

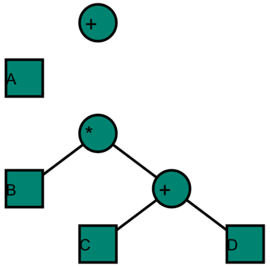
ReadTerm()
ReadProduct()
ReadFactor()



Term → Binärbaum

A + B*(C+D)/E

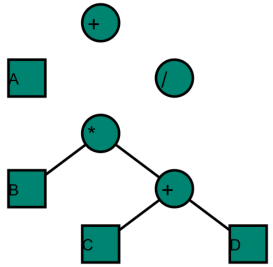
ReadTerm()
ReadProduct()



Term → Binärbaum

A + B*(C+D)/E

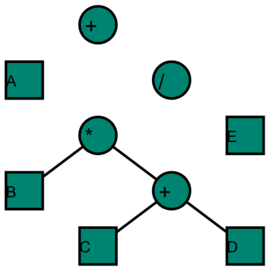
ReadTerm()
ReadProduct()



Term → Binärbaum

A + B*(C+D)/E

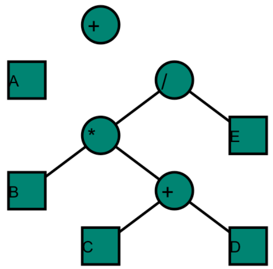
ReadTerm()
ReadProduct()
ReadFactor()

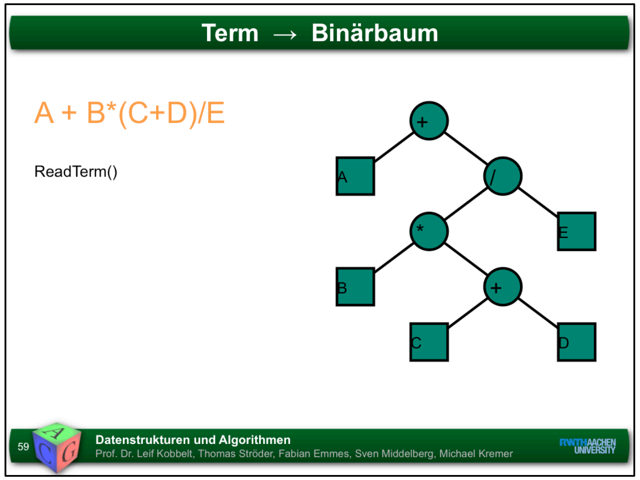


Term → Binärbaum

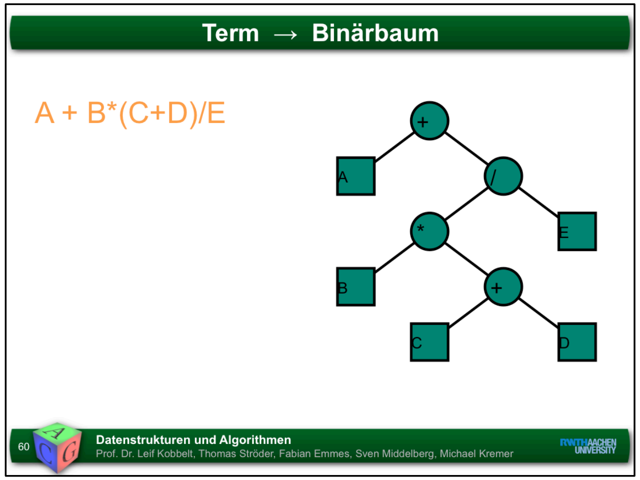
A + B*(C+D)/E

ReadTerm()
ReadProduct()

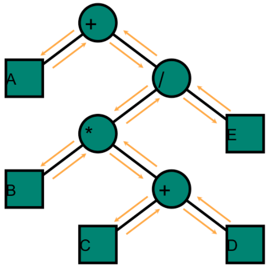




Klammerung hat höchste Priorität. Dann gilt Punkt vor Strichrechnung. Der resultierende Baum ist bis auf Rotation der Sub-Bäume eindeutig.



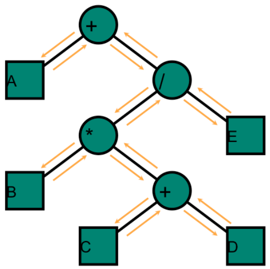
Traversierung



Traversierung

- Traverse(BinTree T)
  if Leaf(T) then
      output(Value(T))
  else
      Traverse(Left(T))
      Traverse(Right(T))

Traversierung



Traversierung

- Operator (= Knotenwert) steht
  - vor den Argumenten → Präfix
  - zwischen den Argumenten → Infix
  - nach den Argumenten → Postfix
- Einfache Varianten der rekursiven Traverse

Reihenfolge der Traversierung definiert, ob Präfix/Infix/Postfix

Präfix

- Traverse(BinTree T)
  if Leaf(T) then
  output(Value(T))
  else
  output(Value(T))
  Traverse(Left(T))
  Traverse(Right(T))

Infix

- Traverse(BinTree T)
  if Leaf(T) then
  output(Value(T))
  else
  Traverse(Left(T))
  output(Value(T))
  Traverse(Right(T))

Infix

- Traverse(BinTree T)
  if Leaf(T) then
  output(Value(T))
  else
  output(`(`)
  Traverse(Left(T))
  output(Value(T))
  Traverse(Right(T))
  output(`)`)

Achtung: Klammern für korrekte Syntax notwendig !!!

Postfix

- Traverse(BinTree T)
  if Leaf(T) then
  output(Value(T))
  else
  Traverse(Left(T))
  Traverse(Right(T))
  output(Value(T))

Traversierungsstrategien

- Rekursive Algorithmen
  - Depth-first
    - Präfix / Infix / Postfix
- Nicht-rekursive Algorithmen
  - Depth-first (Stack)
  - Breadth-first (Queue)

Depth-First

- Traverse(BinTree T)

```
if Leaf(T) then
        output(Value(T))
else
        Traverse(Left(T))
        Traverse(Right(T))
```

Depth-First

- Traverse(BinTree T)
  S ← CreateStack()
  S ← Push(T,S)
  DepthFirst(S)

Depth-First

- DepthFirst(Stack S)

```
while not Empty(S) do
    T ← Top(S)
    S ← Pop(S)
    ... do something with T ...
if not Empty(Right(T)) then
        S ← Push(Right(T),S)
if not Empty(Left(T)) then
        S ← Push(Left(T),S)
```

Breadth-First

- Zähle die Knoten nach ihrer Tiefe sortiert auf, d.h. alle Knoten mit Tiefe k vor dem ersten Knoten mit Tiefe $k+1$
- Labyrinth-Suche: Gehe nicht bis zur Sackgasse (depth-first), sondern probiere erst alle Pfade der Länge k vor den Pfaden mit Länge $k+1$ ...
- Verhindert unendliches Suchen

Breadth-First

- Traverse(BinTree T)
  Q ← CreateQueue()
  Q ← Enq(T,Q)
  BreadthFirst(Q)

Breadth-First

- BreadthFirst(Queue Q)

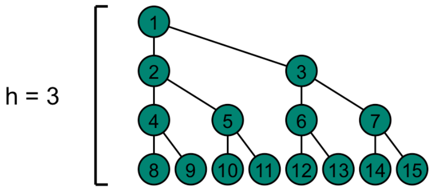
```
while not Empty(Q) do
    T ← Get(Q)
    Q ← Deq(Q)
    ... do something with T ...
if not Empty(Left(T)) then
        Q ← Enq(Left(T),Q)
if not Empty(Right(T)) then
        Q ← Enq(Right(T),Q)
```


Suchbäume

- Bäume ermöglichen wesentlich schnelleren Zugriff auf Elemente als bei lineare Strukturen
- Sortiere die Knoten (kommt später)
  - 1-dimensional
  - k-dimensional

Anzahl der Knoten

- Minimale Anzahl von Knoten in einem Binärbaum der Höhe h: $N_{min}(h) = h+1$
- Maximale Anzahl: $N_{max}(h) = 2^{h+1}-1$

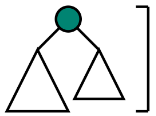


Höhe des Baumes

- Für n Knoten ist die maximale Höhe des Binärbaumes: $H_{max}(n) = n-1$
- Die minimale Höhe: $H_{min}(n) = \lceil \log(n+1)/\log(2) \rceil - 1$
- Die Tiefe+1 eines Knoten beschreibt die Anzahl der Zugriffe, um ihn zu finden.

Fragen der Effizienz

- Optimaler Zugriff bei vollständigen Bäumen. Diese sind aber nicht immer einfach zu konstruieren.



- Balancierte Bäume ...
  - $N_{bal,max}(h) = 2^{h+1}-1$
  - $N_{bal,min}(h) = 1 + N_{bal,min}(h-1) + N_{bal,min}(h-2)$

Fragen der Effizienz

- Minimale Anzahl von Knoten

$$N_{bal,min}(h) = 1 + N_{bal,min}(h-1) + N_{bal,min}(h-2)$$
$$\geq 2 \times N_{bal,min}(h-2)$$
$$\geq 4 \times N_{bal,min}(h-4)$$
$$\geq \begin{cases} 2^{(h-1)/2} \times N_{bal,min}(1) & \text{... H ungerade} \\ 2^{h/2} \times N_{bal,min}(0) & \text{... H gerade} \end{cases}$$
$$\geq \sqrt{2}^h$$

Fragen der Effizienz

- Minimale Anzahl von Knoten
  $N_{bal,min}(h) \geq \sqrt{2}^h$
- Maximale Höhe für n Knoten
  $H_{bal,max}(n) \leq \lceil \log(n)/\log(\sqrt{2}) \rceil$

  $= 2\times\lceil \log(n)/\log(2) \rceil$

  $\approx 2\times H_{min}(n)$

Suchen in Suchbäumen

- Knoten sind sortiert angeordnet (Sortieralgorithmen später)
  - max(T) = maximaler Knotenwert im Baum T
  - min(T) = minimaler Knotenwert im Baum T
  - Sortierung ... für alle Knoten/Sub-Bäume gilt:
    $\max(Left(T)) \leq Value(T) < \min(Right(T))$

Suchen in Suchbäumen

- Depth-first Traversal
  - Mit jedem Test kann bis zu der Hälfte der Knoten ausgeschlossen werden.

Suchen in Suchbäumen

- Bool Search(Element X, BinTree T)

```
if X = Value(T) then
    return true
else if Leaf(T) then
    return false
else if X < Value(T) then
    Search(X,Left(T))
else
    Search(X,Right(T))
```

Einfügen und Löschen

- Bei Suchbäumen bestimmt der Wert des Elementes die Position im Baum (impliziter Marker)
- Einfügereihenfolge bestimmt die Struktur (bessere Algorithmen später)
- Löschen innerer Knoten nicht trivial

Einfügen

- Insert(X,Create()) =
  Node(Create(),X,Create())

- Insert(X,Node(L,Y,R)) =
  Node(Insert(X,L),Y,R) ... if X ≤ Y
  Node(L,Y,Insert(X,R)) ... if X > Y

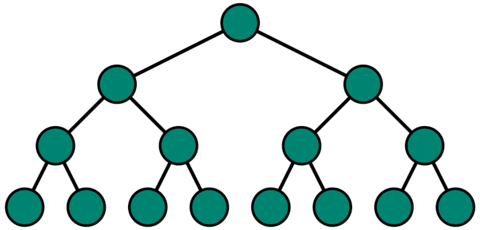
Löschen

- Remove(X,Node(L,Y,R)) =
    Node(Remove(X,L),Y,R) ... if X < Y
    Node(L,Y,Remove(X,R)) ... if X > Y
    // X ≠ Y
- Max(Node(L,X,Create()) = X
  Max(Node(L,X,R)) = Max(R)
- Min(Node(Create(),X,R) = X
  Min(Node(L,X,R)) = Min(L)

Löschen

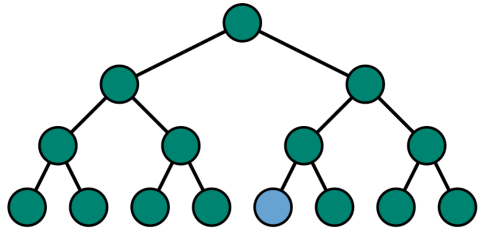
- Remove(X,Node(L,X,R)) =
    Node(Remove(Max(L),L),Max(L),R)
    ... if L ≠ Create()
    Node(L,Min(R),Remove(Min(R),R))
    ... if L = Create() and R ≠ Create()
    Create() ... if L = R = Create()

Beispiel



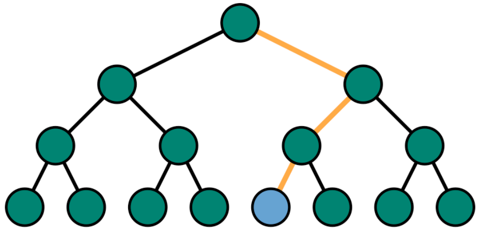
Beispiel

Remove(,T)



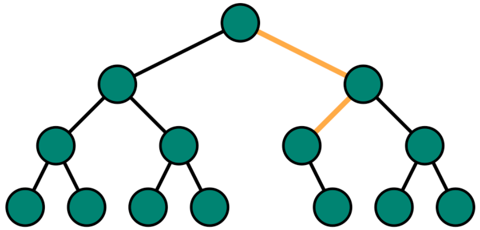
Beispiel

Remove(,Node(Create(,Create()))

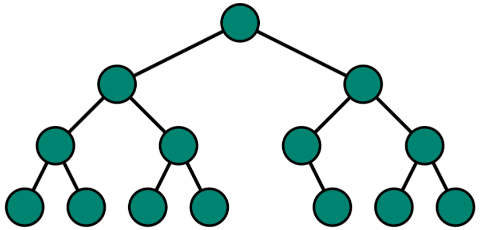


Beispiel

Create()

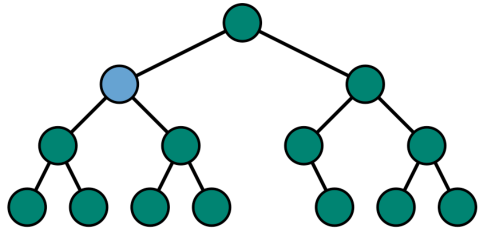


Beispiel



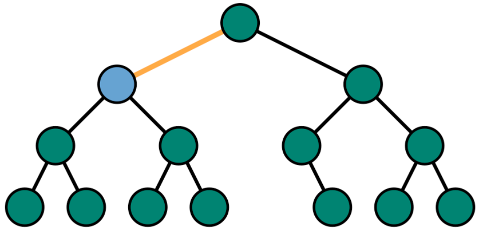
Beispiel

Remove(,T)



Beispiel

Remove(,Node(L, ,R))

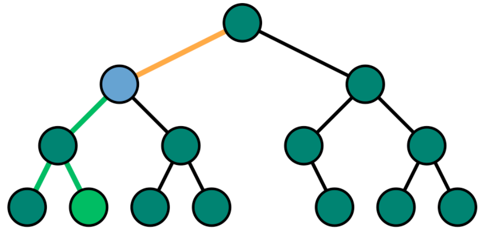


95 Datenstrukturen und Algorithmen
Prof. Dr. Leif Kobbelt, Thomas Ströder, Fabian Emmes, Sven Middelberg, Michael Kremer
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Beispiel

Remove(,Node(L, ,R))

= Max(L)



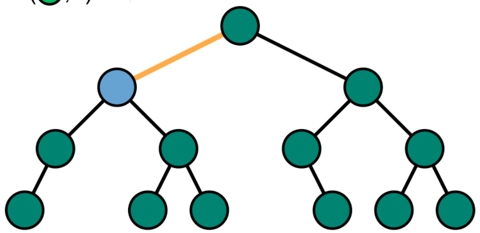
96 Datenstrukturen und Algorithmen
Prof. Dr. Leif Kobbelt, Thomas Ströder, Fabian Emmes, Sven Middelberg, Michael Kremer
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Beispiel

Remove(,Node(L, ,R))

= Max(L)

Remove(,L)

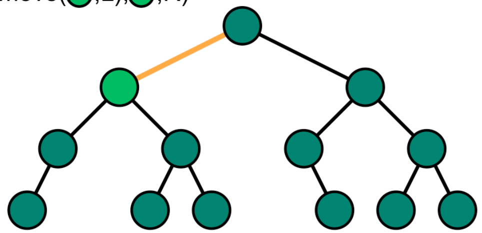


Beispiel

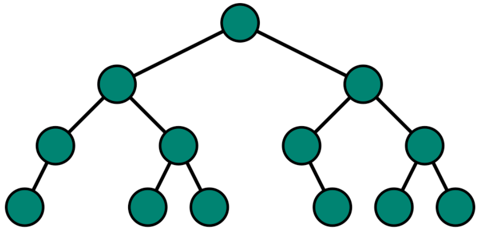
Remove(,Node(L, ,R))

= Max(L)

Node(Remove(,L), ,R)



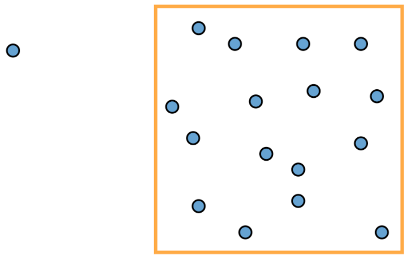
Beispiel



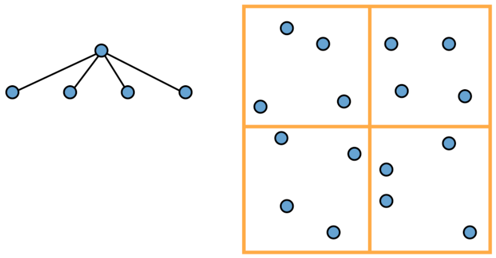
k-dimensionale Suchbäume

- Beispiel: Suche nach Punkten im R^2 (nächste Tankstelle, ...) oder im R^k
- Verwende 2^k-näre Bäume
  - Quadtree (R^2)
  - Octree (R^3)
  - ...
- kD-Bäume (k-dimensionale Binärbäume)

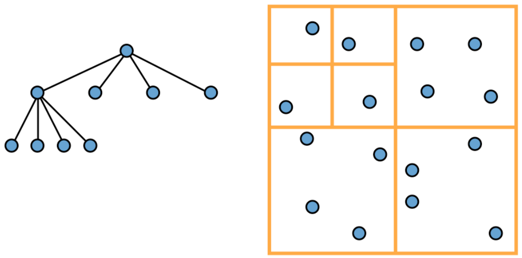
Quadtree



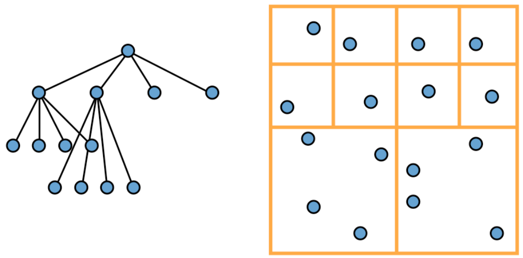
Quadtree

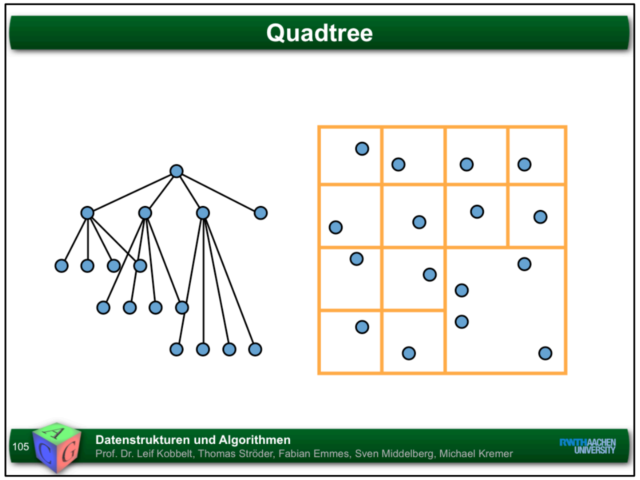


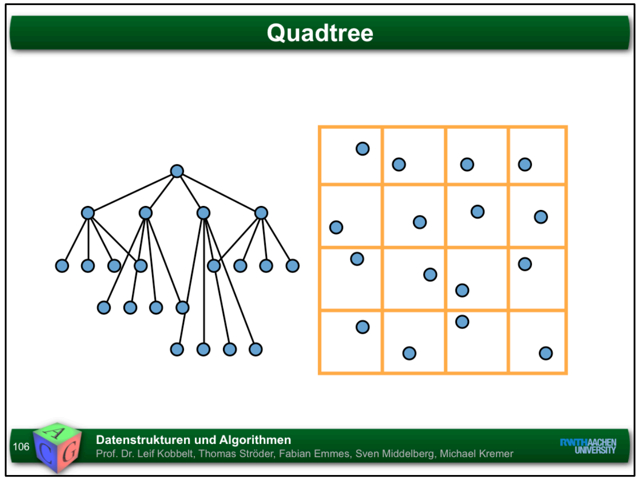
Quadtree



Quadtree





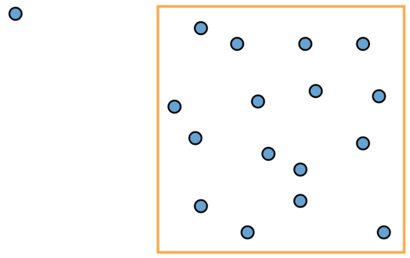


In dieser Baumstruktur wird der nD-Raum in 2^n uniforme Bereiche partitioniert. Im nächsten Schritt wird jeder dieser Bereiche wieder in 2^n gleichgroße Bereiche unterteilt, usw.
Im Zweidimensionalen heißt der Baum „Quadtree“, weil der Raum in jeweils 2^2 = 4 gleichgroße Bereiche geteilt wird. Das Äquivalent im Dreidimensionalen ist der Octree (2^3 = 8). Die Unterteilung geschieht solange, bis eine gewünschte Auflösung erreicht ist oder jede Zelle eine bestimmte maximale Anzahl an Elementen enthält.

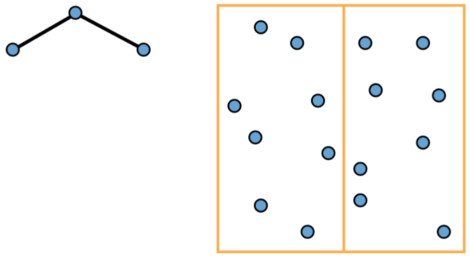
kD-Bäume

- Datentyp: Binärbaum
- Jeder Knoten enthält einen k-dim. Wert
- Sortierung für Knoten T der Tiefe h:
  $\max_h(\mathrm{Left}(T)) \leq \mathrm{Value}_h(T) < \min_h(\mathrm{Right}(T))$
- Subskript h bedeutet: Verwende die (h mod k)-te Koordinate

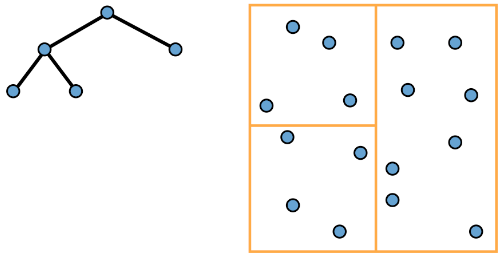
kD-Bäume



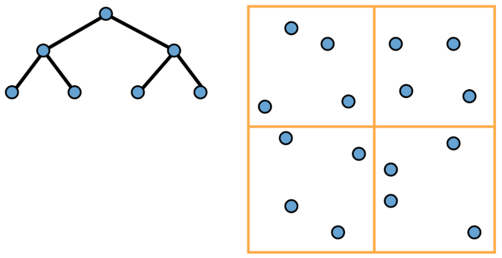
kD-Bäume



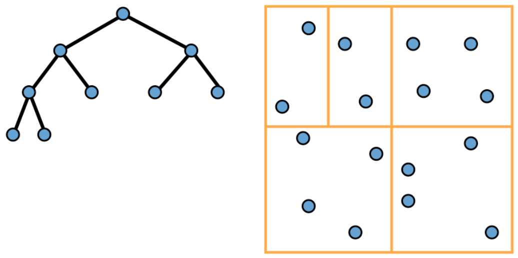
kD-Bäume



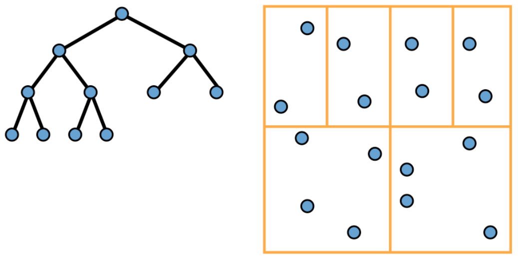
kD-Bäume



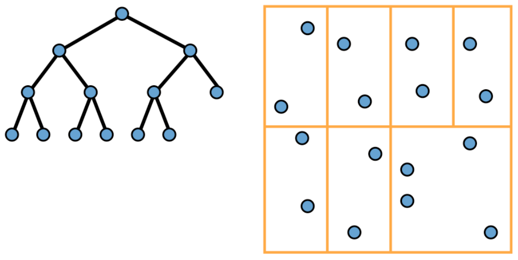
kD-Bäume



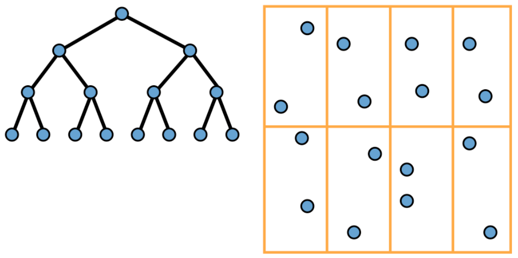
kD-Bäume



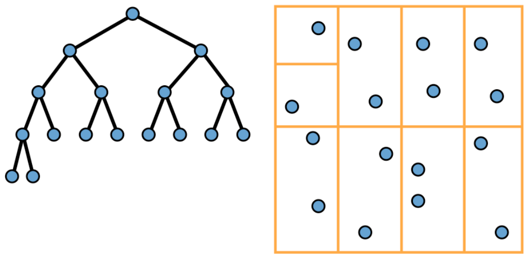
kD-Bäume



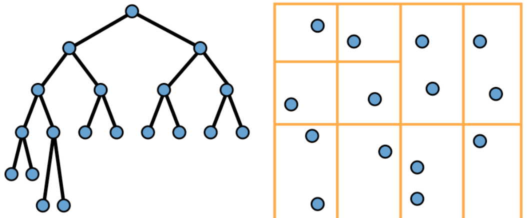
kD-Bäume



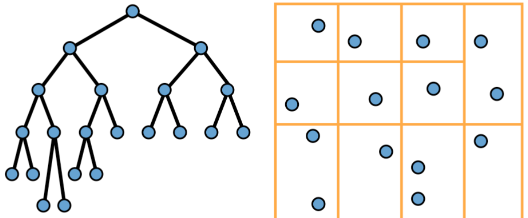
kD-Bäume



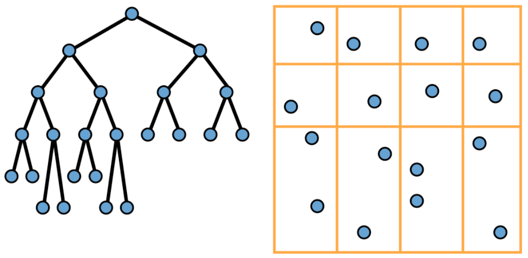
kD-Bäume



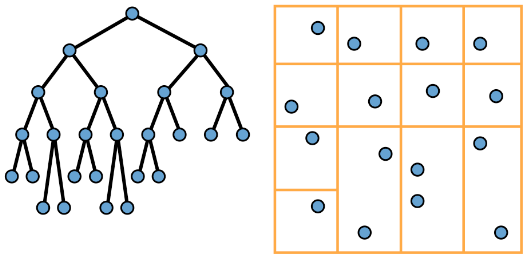
kD-Bäume



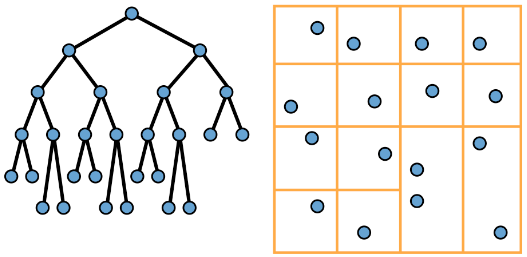
kD-Bäume



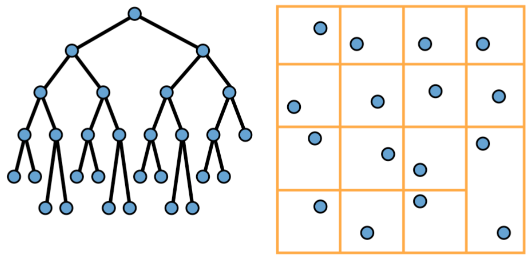
kD-Bäume



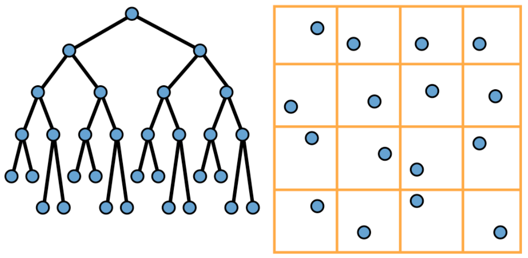
kD-Bäume



kD-Bäume



kD-Bäume



Weitere Baumstrukturen ...

- Baum-Strukturen beschleunigen die Suche in großen Datenmengen.
- Einfügeoperationen beeinflussen die Verteilung der Knoten im Baum.
- Löschungsoperationen können eine komplexe Umstrukturierung des Baumes bewirken.